

粘塑性材料结构的有限元分析方法

北京航空航天大学 杨晓光** 耿 瑞

【摘要】 本文针对 Walker 粘塑性本构方程, 通过发展一自适应变步长积分算法, 用户子程序的方法把该本构方程结合进了国际著名的非线性有限元软件 ABAQUS, 并进行了算例验证。它包括了四种单元类型, 可考虑材料变形的率相关, 加载的循环、非等温、变温等情况。适用于发动机热端部件非线性结构分析。

主题词: 粘塑性 本构方程 有限元

分类号: V 231.9 O 346

1 引言

很多的研究及应用表明^[1]: 目前基于经典弹塑性和蠕变理论的非线性结构分析方法不足以正确设计、改进和分析航空航天及核动力设备关键热端零件的强度及疲劳寿命。其主要原因之一是结构承受各种复杂恶劣的循环加载和瞬态加载条件, 这些条件使材料经受了与应力、温度和时间相关的并且是耦合的非线性行为。基于经典弹塑性及蠕变理论的本构方程, 通常是把非弹性应变分为与时间相关的蠕变和与时间无关的塑性。但是大量的实验表明: 在高温下其本质上是时间相关的, 并且两者有交互作用。这表明非弹性变形是由一单一的机理在控制, 宜用统一的方法, 即把塑性及蠕变相联系起来的弹粘塑性本构方程来处理。

目前, 这类统一型的本构理论在近 20 年得到了很大的发展, 已有十多种方法。尤其是与有限元结构分析方法后, 逐渐在实际的工程分析得到了应用。这些本构模型大都根据不可逆热力学及位错动力学的研究成果, 恰当地选择单个或多个内变量及其演变方程用以描述非弹性变形的诸方面, 如塑性、蠕变、松弛等。本文将根据 Walker 粘塑性本构理论, 通过发展自适应显式积分方法, 把该本构方程结合进通用的大型非线性有限元程序 ABAQUS, 并进行了该本构理论率相关, 循环, 热恢复及非等温等分析能力的验证。

2 Walker 粘塑性本构理论

一般应变率可分为弹性应变率和非弹性应变率, 并且弹性部分遵循 Hooke 定律。

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^n \quad (1)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^e = [(1 + \nu)/E] \dot{\sigma}_{ij} - (\nu/E) \dot{\sigma}_{kk} \delta_{ij} \quad (2)$$

式中: E 为杨氏模量, ν 为泊松比, δ_{ij} 为 Kronecker 符号。非弹性部分根据对材料硬化和恢复的不同处理将有不同的形式。

Walker 型本构理论^[2]是一种无屈服条件的理论。这就意味非弹性变形将在加载的所有阶段出现,虽然在弹性范围内它很小。其流动准则为: $\dot{\epsilon}_{ij}^{\text{an}} = \lambda(S_{ij} - \Omega_{ij})$ 。式中 λ 是与加载历史有关的标量, Ω_{ij} 称为背应力或“平衡应力”,它表示了运动硬化。各向同性硬化用标量 K 表示。非弹性应变率^[2]:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{\text{an}} = \left\{ \frac{\left[\frac{2}{3} \left(\frac{3}{2} S_{ij} - \Omega_{ij} \right) \right] \left[\frac{3}{2} S_{ij} - \Omega_{ij} \right]}{K} \right\}^{1/2} \frac{\frac{3}{2} (S_{ij} - \Omega_{ij})}{\left[\frac{2}{3} \left(\frac{3}{2} S_{ij} - \Omega_{ij} \right) \right] \left[\frac{3}{2} S_{ij} - \Omega_{ij} \right]^{1/2}} \quad (3)$$

这里:

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - (1/3) \sigma_{kk} \delta_{ij}$$

背应力率:

$$\dot{\Omega}_{ij} = \frac{2}{3} (n_1 + n_2) \dot{\epsilon}_{ij}^{\text{an}} - \left[\Omega_{ij} - \Omega_{ij}^0 - \frac{2}{3} n_1 \dot{\epsilon}_{ij}^{\text{an}} \right] G^{\circ} \quad (4)$$

其中:

$$G^{\circ} = [n_3 + n_4 \exp(-n_5 R)] R + n_6 \left[(2/3) \Omega_{ij} \dot{\Omega}_{ij} \right]^{(m-1)/2} \quad (5)$$

$$K = K_1 - K_2 \exp(-n_7 R)$$

式中: $K_1, K_2, n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, m, \Omega_{ij}^0$ 材料常数, R 为累积等效非弹性应变。

一般来说本构方程是温度相关的,也即方程材料常数是温度相关的。这样为了遵循不可逆热力学定律,以考虑到非等温的情况, Ω_{ij} 变为:

$$\dot{\Omega}_{ij} = [\dot{\Omega}_{ij}]_{T=0} + \frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij}^{\text{an}} \frac{\partial \Omega_{ij}}{\partial T} - \left[\Omega_{ij} - \Omega_{ij}^0 - \frac{2}{3} n_1 \dot{\epsilon}_{ij}^{\text{an}} \right] \frac{1}{n_2} \frac{\partial \Omega_{ij}}{\partial T} T^{\circ} \quad (6)$$

3 本构方程积分方法

目前统一型粘塑性本构方程总是以率形式给出,这就需要通过合适的积分方法把率形式的本构方程转化为增量形式的本构方程。通常采用的积分方法有显式的、隐式的和混合式的。这类率形式的统一型本构方程在数学上称之为“刚”的,也即自变量一个小的变化将引起因变量一个很大的变化。这通常是运动方程的高度非线性特点所决定的。因此在其积分方法上需特别注意。

Kumar^[3]等人对这类方程的各种积分方法进行了系统比较研究。有时,一种相对比较简单显式积分方法可能优于高阶的或隐式的积分方法。Cassenti^[4]曾成功地将 Euler 积分方法应用于 Walker 方程。显式积分方法虽然是条件稳定的,但是在积分时恰当地控制积分步长,积分结果和效率是可以接受的。有时它优于高阶的 Runge-Kutta 方法。特别是它可以很好地与目前的有限元软件相结合。

下面给出一种自适应变步长的 Euler 前差显式积分方法(SAFE),该方法与细分步长技术相结合,将结合进 ABAQUS 程序。

如上所述的本构方程,通常可以用一阶的非线性偏微分方程表示,这样在某一给定时刻 t 时的应力、应变和其他内变量可以以更紧凑的形式给出: $dy/dt = F(y, t)$ 。 y 可以是应力,非弹性应变,背应力等; $F(y, t)$ 是上述本构方程右端非线性项的缩写。这些偏微分方程通常是高度非线性的;积分时,为了保证其稳定性,需要较小的积分步长。当采用细分步长技术积分本构方程时,假定初始值 $y(t=0) = y_A$ 已知,这样从时刻 t (此时各状态变量已知,即应力、非弹性应变、背应力已知)到 $t + \Delta t$ 时刻的积分可按下面的方法完成:首先积分步长 Δt 细分为 N 个等份,再采用 Euler 显式积分公式:

$$y_{t+\Delta t/N\text{SPLIT}} = y_t + (\Delta t/N\text{SPLIT})F(y, t) \quad (7)$$

上方程重复 N S P L I T 遍即可得到 y 在 $t + \Delta t$ 时的解。 Δt 一般为有限元中整体时间载荷增量(步长)。采用上面 Euler 显式方法进行本构方程积分的成功与否, 很重要的一点是要恰当的选择时间步长($\Delta t/N\text{SPLIT}$), 时间步长不能太大以至破坏“时间步长为 y 为常变化率”的假定。对粘塑性本构方程, 这通常要求很小的时间步长。为此, 将采用下面的方法来预报积分的成功与否, 即对每一细分步长, 采用应变度量的方法, 确保积分成功(时间步长合适)。首先定义下面的应变度量(应变的改变): $\text{ERROR} = R + \sqrt{3\Delta J_2}/2E_0$ 。式中: $\Delta R = \sqrt{(2/3)\Delta\epsilon_{ij}^n\Delta\epsilon_{ij}^n}$, $\Delta J = (3/2)\Delta S_{ij}\Delta S_{ij}$ 。经过数值积分试算: 当 ERROR 不超过 10^{-4} , 积分总是稳定的。因此, 可以采用变步长的方法改进在时间步长 Δt 内, 在细分步长 $\Delta t/N\text{SPLIT}$ 上的积分。由(7)式可知, 细分的时间步长取决于 N S P L I T, 可以有三种方法决定 N S P L I T。(1) 如果 ERROR 在指定的范围内, 通常上限为 10^{-4} , 下限为 10^{-5} , N S P L I T 不需改变; (2) 如果 ERROR 小于下限 10^{-5} , N S P L I T 减半; (3) 如果 ERROR 大于 10^{-4} , N S P L I T 翻倍, 并且在该细分时间步上的积分重新进行。

有限元时间载荷步长 Δt 的确定, 一般依靠 ABAQUS 中时间步长增长策略。通常, 可以选择由 ABAQUS 提供的自动时间步长增长策略, 也可人为的使用固定时间步长增长策略, 或在 ABAQUS 提供的用户子程序上, 通过变量 PNEWDT 直接控制。

4 与 ABAQUS 的结合

ABAQUS 是目前国际上著名的非线性有限元分析软件, 它提供了一个用户子程序 UMAT, 以帮助用户把自己的材料模型结合进 ABAQUS 程序。ABAQUS 是采用 Newton-Raphson 方法求解非线性有限元平衡方程, 对准静态加载情况, 有:

$$\sum \left(\int_V B^T J B dV \right) C^k = P(t + \Delta t) - \sum \int_V B^T [\sigma(t) + \Delta\sigma(\Delta u^k)] dV \quad (8)$$

$$\Delta u^{k+1} = \Delta u^k + C^k \quad (9)$$

式中: B 是位移增量与应变增量转换矩阵, $\Delta\epsilon = B \Delta u$ 。应力增量是应变增量的函数, 因此也是位移增量的函数。方程(8)给出了第 K 次迭代对位移增量的修正。当应用 Newton-Raphson 迭代方法求解有限元平衡方程时, 需给出方程(8)中 Jacobian 阵 $J = (\partial\Delta\sigma/\partial\Delta\epsilon)_{t+\Delta t}$, 也即为 UMAT 子程序中的 DDSDDE 矩阵, 它定义为在 $t + \Delta t$ 时, 第 J 个应变分量的微小增量对 I 个应力分量的扰动。通常 DDSDDE 矩阵是对称的, 但是当采用细分技术时不能得到 J 的显式表达式, 因此这里采用弹性刚度矩阵, 这就象有限元方法中的“常刚度”法。ABAQUS 将在每个单元的每个积分点调用 UMAT。

在求解的过程中, 需记录保存与求解过程相关的变量, 如非弹性应变, 背应力等, 这可以储存在 UMAT 子程序的 NSTATV 数组中, 并且可以定义储存的数量。对 Walker 本构方程, 这里定义了 14 个与求解过程相关的变量, 即 6 个非弹性应变, 6 个背应力, 1 个累积等效非弹性应变, 1 个 N S P L I T 变量。

当运行 ABAQUS 时, 每当调用材料模式, 都进入 UMAT 子程序。ABAQUS 主程序在进入 UMAT 时, 向 UMAT 传进应变增量 $\Delta\epsilon$, 温度增量 $\Delta\theta$, 时间步长 Δt 及外载增量 ΔP_i , 同时也传入当前已知状态的应力, 应变, 温度及其它与求解过程相关的变量。在 UMAT 中, 用户根据本构方程, 需更新应力及其它相关的变量, 并提供 DDSDDE 给 ABAQUS 主程序。对所有加

载步(STEP)的第一个载荷增量,ABAQUS 都向UMAT 传入零应变增量。如果该步内考虑循环加载,则对每一步内的所有增量,ABAQUS 都传入零应变增量。

考虑到应用于航空发动机热端部件,在对UMAT 编程时,主要包括了:平面应力、平面应变、轴对称和 3D 实体元。它可以通过ABAQUS 的NDI和NSHEAR 变量进行识别。

5 算例验证

为了验证模型及所编的UMAT 程序,采用了一个单元(8 节点三维元或轴对称元)的计算模型。ABAQUS 为 5.6 版,计算机为SUN Ultra I,内存 64M。材料为Hastelloy-X,其Walker 理论材料数据来自文献[2],见表 1。计算的结果见图 1~图 4。比较图 1 和图 2,表明程序

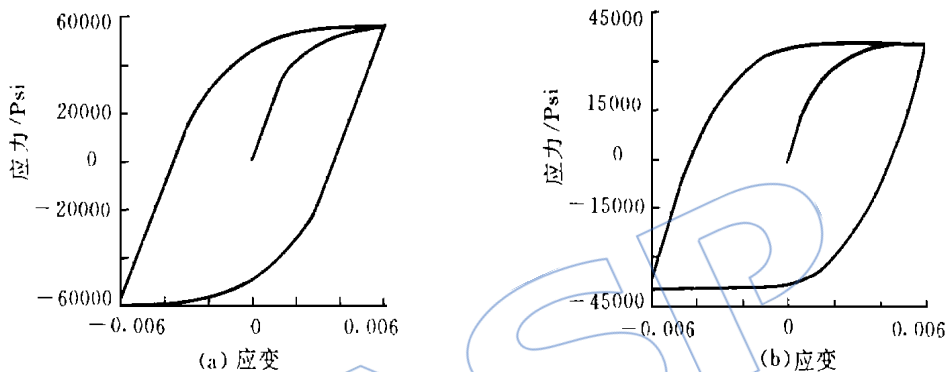


图 1 649℃,应变率为 3.7×10^{-5} , 1.2×10^{-6} 循环的应力应变曲线(a) 3.7×10^{-5} (b) 1.2×10^{-6}

表 1 Hastelloy-X Walker 理论材料数据

温度/℃	427.	537.	648.	760.	871.	962.
杨氏模量/Psi	26.0e6	24.0e6	24.0e6	22.6e6	18.6e6	13.2e6
泊松比 ν	0.322	0.328	0.334	0.339	0.345	0.351
K_1 /Psi	50931.	75631.	95631.	251886.	91505.	59292.
K_2 /Psi	0	0	0	0	0	0
m	0.059	0.059	0.079	0.244	0.195	0.233
$1/n$	1.16	1.16	1.16	1.16	1.16	1.16
n_1 /Psi	0	0	0	0	0	0
n_2 /Psi	30.e7	6.e7	1.5e7	2.0e7	5.0e6	1.0e6
n_3	8000.	1000.	781.	1179.	673.	312.
n_4	0	0	0	0	0	0
n_5	0	0	0	0	0	0
$n_6/(Psi^{1-m} \cdot Sec^{-1})$	0	0	0	0	8.89e- 4	2.73e- 3
n_7	0	0	0	0	0	0
Ω_{ij}/Psi	0	0	- 2000.	- 2000.	- 1434.	- 1200.

具有预测在同温度下,循环变形的率相关性的能力。由图 1(a)和图 2(a),图 1(b)和图 2(b),可看出程序可预测在同应变率下,循环变形对温度的相关性。图 3 表明了程序预测变加载的情况。特别是由图 4,程序可以很好的预测变温时的材料变形响应,并给出了考虑温度历史相关

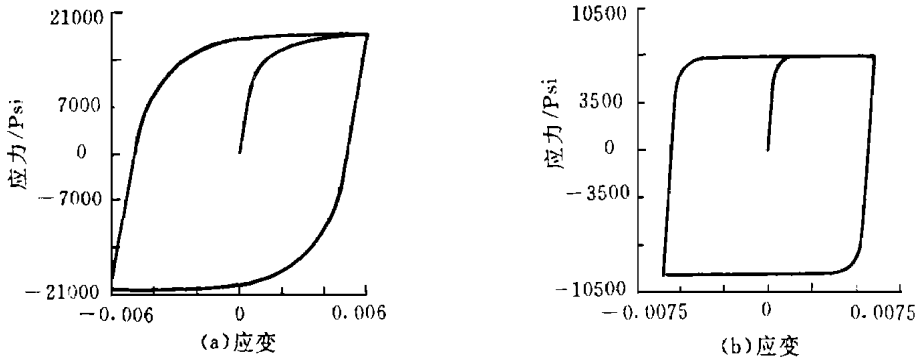


图2 871°C, 应变率为 3.7×10^{-5} , 1.2×10^{-6} 循环的应力应变曲线(a) 3.7×10^{-5} (b) 1.2×10^{-6}

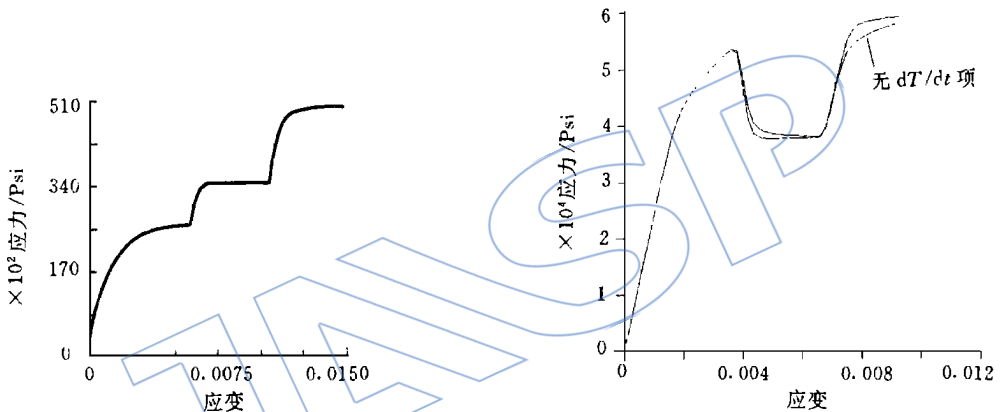


图3 760°C时, 变应变率加载的应力应变曲线
(从 3.0×10^{-6} 到 3.0×10^{-5} 到 3.0×10^{-4})

图4 应变率为 3.7×10^{-5} , 变温条件下的应力应变曲线
(从 650°C 到 850°C 到 650°C)

项(dT/dt)与不考虑温度历史相关项时, 计算结果的差别。与文献[2]给出的实验结果比, 计算结果的准确性是满意的, 积分算法是成功的, 计算效率是可以接收的。目前由于只进行了单一单元的模型验证, 对于复杂工程结构, 本构理论及所编程序的能力还需进一步验证。

参 考 文 献

- 1 Chan K S, et al A Survey of Unified Constitutive Theories N 85- 31531, 1985
- 2 Walker K P. Research and Development Program for Non-Linear Structural Modeling with Advanced Time-Temperature Dependent Constitutive Relationships NASA CR- 165553, 1981
- 3 Kumar V, et al Numerical Integration of Some Stiff Constitutive Models of Inelastic Deformation Trans ASME J. of Eng. Mat. and Tech., 1980, 102: 91- 96
- 4 Cassenti B N. Research and Development Program for the Development of Advanced Time-Temperature Dependent Constitutive Relationships NASA CR- 168191, 1983, 2:

(责任编辑 杨再荣)

ometry. The system also provides the ability of editing the pipe's property and shape and ability of interference and clearance checking. The piping object is capable of intelligent response to the change of the joint. The system can also serve as a piping system of automobile, or for petroleum and chemical field.

Key Words Aircraft engines Computer aided design Pipeline laying

VIBRATION ANALYSIS OF BLADED DISC COUPLING SYSTEM WITH FRICTION DAMPING

Hu Xunfeng, Wang Qingmeng, Zhang Jin

(4th Dept. Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083)

Liu Xiaoping

(Dept. of Mech. and Elect. Eng. Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing)

ABSTRACT Nonproportional viscous damping is used to simulate the effect of frictional constraint at the shroud interfaces. The effects on the natural vibration behavior and dynamic response are investigated. The damping matrix and stiffness matrix of the interfaces in local coordinate system are presented by using the equivalent viscous damping and stiffness coefficients of the spring/friction model. The response displacements and the corresponding response stress distributions of the coupling system under three kinds of boundary conditions at shroud contact interfaces are obtained respectively by using mode superposition method. The calculation method, the basic analysis approach and the important conclusions provided in the paper may be available for reference in the designing, development and modification of turbomachinery.

Key Words Friction dampers Viscous damping coupling Vibration analysis

A FINITE ELEMENT METHOD FOR STRUCTURE OF VISCOELASTIC MATERIALS

Yang Xiaoguang and Geng Rui

(4th Dept. Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083)

ABSTRACT On the basis of the Walker viscoelastic constitutive theory, after developing a self- adaptive time integration method for the constitutive equation, the authors implemented the Walker constitutive equation into the general- purpose non- linear finite element software ABAQUS through the user- defined subroutine UMAT, and finished benchmarks for rate dependence, cyclic, thermal recovery, non- thermal and varied loading conditions. In coded subroutine four element types were included, and the integration method has the monitor mechanism for successful integration. In the light of comparison with the results in publication, the calculated results are satisfied, and the accuracy and efficiency are acceptable. The coded subroutine can be applied to the nonlinear structure analysis of aero-engine hot sections.

Key Words Viscoelasticity Constitutive equation Finite element methods